Вестник БИСТ (Башкирского института социальных технологий). 2024. № 4(65). С. 133–140
Vestnik BIST (Bashkir Institute of Social Technologies). 2024;4(65):133–140

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Научная статья
УДК 512.643+512.644
doi: 10.47598/2078-9025-2024-4-65-133-140

МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МАТРИЦ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К ТРЕХДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Александр Ильич Быстров[1]✉, Риф Забирович Гильмутдинов[2]
[1,2]Башкирский институт социальных технологий (филиал) Академии труда и социальных отношений, Уфа, Россия
[1]bistrovalex@rambler.ru✉
[2]gilrif@rambler.ru

Аннотация. Предлагается метод понижения размерности матриц при решении систем линейных уравнений в задачах с большой размерностью. Приведен алгоритм метода сведения разряженных матриц систем линейных уравнений к трехдиагональному виду с целью применения для решения систем метода прогонки, ускоряющего процесс расчета. Применение этих методов позволит более эффективно использовать ресурсы вычислительных систем при решении задач большой размерности в экономике и других научных областях.

Ключевые слова: система линейных уравнений, понижение размерности, преобразование матриц, метод прогонки

Для цитирования: Быстров А. И., Гильмутдинов Р. З. Метод понижения размерности матриц систем линейных уравнений и преобразование к трехдиагональному виду при решении экономических задач // Вестник БИСТ (Башкирского института социальных технологий). 2024. № 4 (65). С. 133–140. https://doi.org/10.47598/2078-9025-2024-4-65-133-140.

ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING

Research article

METHOD OF REDUCING THE DIMENSION OF MATRICES OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS AND TRANSFORMATION TO TRIDIAGONAL FORM IN SOLVING ECONOMIC PROBLEMS

Alexander I. Bystrov[1]✉, Rif Z. Gilmutdinov[2]
[1,2]Bashkir Institute of Social Technologies (branch) of the Academy of Labor and Social Relations, Ufa, Russia
[1]bistrovalex@rambler.ru✉
[2]gilrif@rambler.ru

Abstract. A method of reducing the dimensionality of matrices is proposed for solving systems of linear equations in problems with high dimensionality. An algorithm is given for the method of reducing sparse matrices of systems of linear equations to a tridiagonal form in order to apply the sweep method to solve systems, which speeds up the calculation process. The application of these methods will allow more efficient use of computing system resources when solving high-dimensional problems in economics and other scientific fields.

Keywords: system of linear equations, dimension reduction, matrix transformation, sweep method

For citation: Bystrov A. I., Gilmutdinov R. Z. Method of reducing the dimension of matrices of systems of linear equations and transformation to tridiagonal form in solving economic problems. *Vestnik BIST (Bashkirskogo instituta social`ny`x texnologij) = Vestnik BIST (Bashkir Institute of Social Technologies).* 2024;(4(65)):133–140. (In Russ.). https://doi.org/10.47598/2078-9025-2024-4-65-133-140.

Введение

Система линейных уравнений (СЛУ), описывающая балансовые соотношения в разнообразных технологических и экономических задачах [1], может иметь следующие особенности: ненулевые элементы матрицы системы расположены преимущественно на трех диагоналях и незначительное количество – вне трех диагоналей. Если порядок матрицы n системы четный, то матрица СЛУ может состоять из четырех таких матриц размерности $n/2$, корни системы обычно положительны.

Имеющиеся в литературе методы расчета не позволяют с достаточной точностью и быстро решать такие системы уравнений.

Для решения таких систем линейных алгебраических уравнений предлагается следующее: разбиение общей системы уравнений на подсистемы меньшей размерности за счет подстановки одних переменных через другие, преобразование полученных матриц подсистем к трехдиагональному виду, соответствующему условиям для точного решения методом прогонки [2], расчет методом прогонки и обратное преобразование переменных для получения всех корней системы. Сокращение размерности системы линейных алгебраических уравнений дает возможность ускорить счет и расширить круг решаемых задач.

Теоретические основы

Ранее одним из авторов использовался этот подход для понижения размерности СЛУ в балансовых задачах при расчете процесса ректификации в нефтепереработке [3]. В настоящей работе решается обобщенная задача понижения размерности для систем линейных алгебраических уравнений путем разбиения системы размерности n на подсистемы размерности m и $(n-m)$, где $m < n$.

Пусть система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать, имеет вид

$$[A](X) = (B), \qquad (1)$$

где $[A]$ — квадратная матрица коэффициентов системы (a_{ij}, $i, j = 1 : n$);

$(X) = (x_1, \ldots, x_n)^m$ — вектор корней системы;

$(B) = (b_1, \ldots, b_n)^m$ — вектор свободных членов системы.

Разобьем систему (1) размерности n на подсистемы размерности m и $(n-m)$

$$\begin{bmatrix} A11 & : & A12 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A21 & : & A22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X1 \\ \cdots \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B1 \\ \cdots \\ B2 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где

$A11 = [a_{1:(n-m),\, 1:(n-m)}]$;

$A12 = [a_{1:(n-m),\, (n-m+1):n}]$;

$A21 = [a_{(n-m+1):n,\, 1:(n-m)}]$;

$A22 = [a_{(n-m+1):n,\, (n-m+1):n}]$;

$X1 = (x_{1:(n-m)})^{\mathrm{T}}$;

$X2 = (x_{(n-m+1):n})^{\mathrm{T}}$;

$B1 = (b_{1:(n-m)})^{\mathrm{T}}$;

$B2 = (b_{(n-m+1):n})^{\mathrm{T}}$.

Цифры в обозначении матриц (векторов) определяют часть индексов коэффициентов (или переменных), присутствующих в (2): 1 — изменяются индексы строк (или столбцов) от 1 до $n-m$, 2 — от $n-m+1$ до n.

Рассмотрим подсистему $n-m$ строк системы (2)

$$[A11](X1) + [A12](X2) = (B1) \qquad (3)$$

и представим в виде

$$[A11](X1) = (B1) - [A12](X2). \qquad (4)$$

Преобразовывая матрицу $A11$ к треугольному виду и решая систему (4) относительно $(X1)$, получим

$$(X1) = (\hat{B}1) - [\hat{A}12](X2), \qquad (5)$$

где $(\hat{B}1)$, $[\hat{A}12]$ – преобразованные значения соответствующих свободных членов $(B1)$ и коэффициентов матрицы $[A12]$.

$$(\hat{B}1) = [A11]^{-1}(B1),\ [\hat{A}12] = [A11]^{-1}[A12].$$

Рассмотрим подсистему m строк системы (2)

$$[A21](X1) + [A22](X2) = (B2), \qquad (6)$$

подставив $(X1)$ из (5), получим:

$$[A21]((\hat{B}1) - [\hat{A}12](X2)) + [A22](X2) = (B2)$$

или

$$[\hat{A}22](X2) = (\hat{B}2), \qquad (7)$$

где

$$[\hat{A}22] = [A22] - [A21][\hat{A}12];$$

$$(\hat{B}2) = (B2) - [A21](\hat{B}1).$$

Решая систему (7) относительно $(X2)$ и подставляя в (5), получим $(X1)$. Таким образом, будут определены все корни СЛУ (1).

Метод является эффективным для понижения размерности системы линейных алгебраических уравнений путем разбиения на подсистемы меньшей размерности. При этом время расчета значительно сокращается, так как решение системы n-й размерности значительно дольше решения двух подсистем размерности m и $n-m$. Как показали расчетные исследования, наиболее эффективно принимать $m = n/2$ за счет возможности использования при этом метода прогонки при решении подсистем линейных алгебраических уравнений размерности $n/2$.

Для преобразования матрицы СЛУ к трехдиагональному виду с целью применения наиболее быстрого метода расчета — метода прогонки [2] — используем следующий способ.

Предположим, что матрицы коэффициентов СЛУ вне трехдиагональной системы содержат ненулевые элементы, исходя из этого поиск корней осуществляется в два этапа.

На первом этапе преобразуем СЛУ к трехдиагональному виду, на втором определяем корни системы методом прогонки [2].

В общем случае, когда матрица системы содержит несколько ненулевых элементов вне трех диагоналей, проверка на их наличие и преобразование системы уравнений осуществляется по следующей схеме, изображенной на условной матрице

$$\begin{bmatrix}
x & x & . & . & . & . & . & . & . & p \\
x & x & x & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & x & x & x & . & . & . & . & . & . \\
5 & 3 & x & x & x & . & . & . & . & . \\
11 & 9 & 7 & x & x & x & . & . & . & . \\
. & . & . & . & x & x & x & 8 & 10 & 12 \\
. & . & . & . & . & x & x & x & 4 & 6 \\
. & . & . & . & . & . & x & x & x & 2 \\
p-1 & . & . & . & . & . & . & . & x & x
\end{bmatrix}$$

где x – элемент трех диагоналей;

$1, 2, 3, \ldots, p$ — последовательность проверяемых элементов в матрице;

p — номер последнего проверяемого элемента в матрице, который равен $n^2 - 3n + 2$;

n — размерность матрицы.

Имеем систему линейных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_2 & & & & & & & & \\ a_1 & b_2 & . & & & 0 & & & & \\ & . & . & . & & & & & & \\ & & . & . & . & & & & & \\ & & & a_{j-1} & b_j & c_{j+1} & \dots & \beta_{jk} & & \\ & & & & . & . & . & & & \\ & & \alpha_{pq} & \dots & a_{p-1} & b_p & c_{p+1} & & & \\ & & & & & . & . & . & & \\ & & & & & & . & . & . & \\ & & & & & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_j \\ . \\ x_p \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_j \\ . \\ d_p \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

и преобразуем ее к виду

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_2 & & & & & & & & \\ a_1 & b_2 & . & & & & & & & \\ & . & . & . & & & 0 & & & \\ & & . & . & . & & & & & \\ & & & a_{j-1} & b_j^* & c_{j+1}^* & & & & \\ & & & & . & . & . & & & \\ & & & & a_{p-1}^* & b_p^* & c_{p+1} & & & \\ & & 0 & & & . & . & . & & \\ & & & & & & . & . & . & \\ & & & & & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_j \\ . \\ x_p \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_j^* \\ . \\ d_p^* \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

В системах (8) и (9)

α_{pq}, β_{jk} — ненулевые элементы;

$b_j^*,\ c_{j+1}^*,\ d_j^*$ — новые значения соответствующих элементов (8) при исключении элементов β_{jk};

$a_{p-1}^*,\ b_p^*,\ d_p^*$ — новые значения соответствующих элементов (8) при исключении элементов α_{pq};

$$b_j^* = b_j + a_j B_2; \qquad (10)$$

$$c_{j+1}^* = c_{j+1} + b_{j+1} B_2 + a_{j+1} B_3; \qquad (11)$$

$$d_j^* = d_j + \sum_{i=k-j}^{2} d_{i+j-1} B_i, \qquad (12)$$

где

$$B_1 = B_{k-j+1} = 0;$$

$$B_{k-j} = -\beta_{jk} / c_k;$$

$$B_i = \frac{a_{ij} B_{i+2} + b_{i+j} B_{i+1}}{c_{i+1}}; \ (i = k-j-1 : 2).$$

$$a_{p-1}^* = a_{p-1} + b_{p-1} A_{p-q} + c_{p-1} A_{p-q-1}; \qquad (13)$$

$$b_p^* = b_p + c_p A_{p-q}; \qquad (14)$$

$$d_p^* = d_p + \sum_{i=2}^{p-q} d_{i+q-1} A_i, \qquad (15)$$

где

$$A_1 = A_{p-q+1} = 0;$$

$$A_2 = -\alpha_{pq} / a_q;$$

$$A_i = \frac{c_{i+q-2} A_{i-2} + b_{i+q-2} A_{i-1}}{a_{i+q-2}}; \ (i = 3 : p-q).$$

После преобразования матрицы к трехдиагональному виду по формулам (10)–(15) проверяем их на условие сходимости к точному решению

$$|b_j| < |a_{j-1}| + |c_{j+1}| . \quad (16)$$

Если оно выполняется, то находим корни системы уравнений.

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов следующий:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_2 & & & & & \\ a_1 & b_2 & . & & 0 & & \\ & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & 0 & & & . & b_{n-1} & c_n \\ & & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где n — размерность системы уравнений;

$a_1, a_2, \ldots , a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots , b_n, c_2, \ldots , c_n$ — коэффициенты системы;

$d_1, \ldots , d_n$ — свободные члены системы;

$x_1, \ldots , x_n$ — корни системы.

Корни системы (17) определяются просто по рекуррентным формулам:

$$x_n = a_n/b_n; \; x_j = \frac{d_j - x_{j+1}c_{j+1}}{b_j}; \; (j = n-1:1). \quad (18)$$

Практическая часть

Приведем пример, реализующий алгоритм метода понижения размерности СЛУ. Порядок системы примем для наглядности расчетов n = 6. Порядок пониженной размерности примем $m = n / 2 = 3$.

Систему уравнений (1) размерности n решаем в приложении MS Excel через обратную матрицу: (X) = [A]$^{-1}$(B).

СЛУ с коэффициентами матрицы системы [A], свободными членами (B) и полученными корнями (X) с использованием обратной матрицы [A]$^{-1}$ приведена на рисунке 1.

Разобьем матрицу коэффициентов системы уравнений [A] на матрицы размерности m = 3: [A11], [A12], [A21] и [A22] (рис. 2). Вектора свободных членов обозначим (B1) и (B2). Корни СЛУ (X) определяем двумя векторами размерности m = 3: (X1) и (X2).

Используя вышеизложенную методику понижения размерности, определим корни системы (1) с использованием матриц размерности $n/2$.

Из формулы (7) $[\hat{A}22]\,(X2) = (\hat{B}2)$ определяем корни

$$(X2) = [\hat{A}22]^{-1}\,(\hat{B}2).$$

$$[\hat{A}22] = [A22] - [A21]\;[\hat{A}12];$$

$$(\hat{B}2) = (B2) - [A21]\,(\hat{B}1).$$

Основные результаты по определению корней $(X2)$ приведены как фрагменты расчета в таблице 1.

Подставляя в (5) основные элементы формулы $(X1) = (\hat{B}1) - [\hat{A}12]\,(X2)$, учитывая, что $(\hat{B}1) = [A11]^{-1}(B1)$ и найденные значения корней $(X2)$, определим корни $(X1)$. Определение корней $(X1)$ приводится в таблице 2.

Сравнивая корни $(X1)$ и $(X2)$ из таблиц 1 и 2, полученных расчетами матриц с пониженной в 2 раза размерностью m = 3 СЛУ с корнями (X) размерности n = 6, наблюдаем полное совпадение. Это доказывает адекватность и эффективность предложенной методики снижения размерности при расчете СЛУ высокой размерности.

[A]						(B)	(X)
1	-2	0	-5	9	3	45	**3,08387409**
7	5	4	2	5	15	15	**-1,62944248**
15	7	1	12	2	6	10	**1,38478806**
8	6	17	2	0	-8	43	**-2,20046238**
5	4	8	7	4	3	15	**3,44631947**
0	10	5	4	9	7	5	**-1,12064874**
$[A]^{-1}$							
0,043042	0,015619	0,060284	0,034588	-0,06667	-0,03549		
-0,04253	0,000232	0,033883	0,04266	-0,16172	0,106752		
-0,01512	0,034054	-0,05515	0,023052	0,083906	-0,02884		
-0,02871	-0,05101	0,005539	-0,05549	0,149311	-0,01055		
0,090314	-0,05516	0,013944	-0,01742	0,045196	0,028254		
-0,02815	0,075406	-0,03011	-0,0233	0,02767	-0,01934		

Рисунок 1 — Результаты определения корней СЛУ размерности *n* (фрагмент расчета в MS Excel)

Figure 1 — Results of determining the roots of a system of linear equations of dimension *n* (fragment of calculation in MS Excel)

	[A11]			[A12]		(B1)
1	-2	0	-5	9	3	45
7	5	4	2	5	15	15
15	7	1	12	2	6	10
8	6	17	2	0	-8	43
5	4	8	7	4	3	15
0	10	5	4	9	7	5
	[A21]			[A22]		(B2)

Рисунок 2 — Матрицы и вектора частей СЛУ (1)

Figure 2 — Matrices and vectors of parts of the system of linear equations (1)

Таблица 1 — Основные параметры для определения корней (X2)

$[\hat{A}12]$			$[\hat{A}22]$			$(\hat{B}1)$	$(\hat{B}2)$
-0,17829	1,651163	0,674419	26,3876	-41,3721	-74,814	8,410853	-116,806
2,410853	-3,67442	-1,16279	15,86047	-13,186	-27,907	-18,2946	-49,0698
-2,20155	2,953488	4,023256	-9,10078	30,97674	-1,48837	11,89922	128,4496
$[A21][\hat{A}12]$			$[\hat{A}22]^{-1}$			$[A21](\hat{B}1)$	$(X2)$
-24,3876	41,37209	66,81395	-0,05549	0,149311	-0,01055	159,8062	**-2,20046238**
-8,86047	17,18605	30,90698	-0,01742	0,045196	0,028254	64,06977	**3,44631947**
13,10078	-21,9767	8,488372	-0,0233	0,02767	-0,01934	-123,45	**-1,12064874**

Таблица 2 — Основные параметры для определения корней (X1)

$[A11]^{-1}$			$[\hat{A}12](X2)$	$(X1)$
0,178295	–0,0155	0,062016	5,326979	**3,08387409**
–0,41085	–0,00775	0,031008	–16,6651	**–1,62944248**
0,20155	0,286822	–0,14729	10,51444	**1,38478806**

Заключение

Предложенный метод понижения размерности матриц СЛУ позволяет значительно снизить объем используемой памяти вычислительных систем при решении задач высокой размерности в экономике, в научных исследованиях и других областях, где используется матричная алгебра [4]. Решение СЛУ с разряженными матрицами позволит ускорить процесс решения задач путем преобразования к трехдиагональным матрицам и решения методом прогонки. Разряженные матрицы рассматриваемой СЛУ часто встречаются в балансовых задачах при расчете материальных, тепловых систем уравнений в процессах фракционирования нефтегазового сырья в аппаратах нефтяной промышленности [5–6]. Использование предлагаемых и некоторых других математических методов [7–8] может быть полезно преподавателям и студентам в области математического моделирования, программирования в решении задач с применением матричных методов.

Список источников

1. Быстров А. И. Гильмутдинов Р. З. Математическое моделирование в экономике : учебное пособие для студентов финансово-экономических специальностей. Уфа : Изд-во БИСТ (филиала) ОУП ВО «АТиСО», 2017. 270 с.
2. Гильмутдинов Р. Ф., Хабибуллина К. Р. Численные методы : учебное пособие. Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2018. 92 с.
3. Быстров А. И., Галиаскаров Ф. М. Эффективный метод расчета балансовых уравнений процесса ректификации нефтяных смесей. Деп. рукопись ЦНИИТЭнефтехим, N 5-нх89 "Депонирование научных работ". 1989. N 8(214). 13 с.
4. Гильмутдинов Р. З., Быстров А. И., Сафин Р. Р. Математические методы и моделирование : учебное пособие. Уфа : Изд-во УГНТУ, 2018. 148 с.
5. Быстров А. И. Деменков В. Н., Хайрудинов И. Р. Подготовка и проведение расчетов процессов переработки нефтяного сырья. Уфа : Изд-во ГУП ИНХП РБ, 2014. 288 с.
6. Методологические и практические аспекты расчетов процесса ректификации нефтяного сырья / В. Н. Деменков, А. И. Быстров, И. Р. Хайрудинов, Н. С. Иванова. Уфа : Изд-во ГУП ИНХП РБ, 2017. 296 с.
7. Гильмутдинов Р. З., Сафин Р. Р. Математические методы в экономике : учебное пособие. Уфа : Изд-во УГАЭС, 2009. 89 с.
8. Гильмутдинов Р. З. Математические методы в экономике : курс лекций. Уфа : Изд-во УИКП, 2006. 82 с.

References

1. Bystrov A. I., Gilmutdinov R. Z. Mathematical modeling in economics: a textbook for students of financial and economic specialties. Ufa: Publishing House of the Bashkir Institute of Social Technologies of the Academy of Labor and Social Relations; 2017. 270 p. (In Russ.).
2. Gilmutdinov R. F., Khabibullina K. R. Numerical methods: a textbook. Kazan: Kazan National Research Technological University (KNRTU); 2018. 92 p. (In Russ.).
3. Bystrov A. I., Galiaskarov F. M. An effective method for calculating balance equations for the distillation process of oil mixtures. Dep. manuscript TsNIITEneftekhim, N 5-nh89 "Deposit of scientific papers". 1989. N 8(214). 13 p. (In Russ.).
4. Gilmutdinov R. Z., Bystrov A. I., Safin R. R. Mathematical methods and modeling: a tutorial. Ufa: Ufa State Petroleum Technical University Publishing house; 2018. 148 p. (In Russ.).

5. Bystrov A. I. Demenkov V. N., Khairudinov I. R. Preparation and implementation of calculations of oil feedstock refining processes. Ufa: State Unitary Enterprise Institute of Petrochemical Processing of the Republic of Bashkortostan Publishing house; 2014. 288 p. (In Russ.).

6. Methodological and practical aspects of calculating the oil feedstock rectification process / V. N. Demenkov, A. I. Bystrov, I. R. Khairudinov, N. S. Ivanova. Ufa: Institute of Petrochemical Processing of the Republic of Bashkortostan Publishing house, 2017. 296 p. (In Russ.).

7. Gilmutdinov R. Z., Safin R. R. Mathematical methods in economics: a tutorial. Ufa: Ufa State Academy of Economics and Service Publishing house; 2009. 89 p. (In Russ.).

8. Gilmutdinov R. Z. Mathematical methods in economics: a course of lectures. Ufa: Ural Institute of Commerce and Law Publishing house, 2006. 82 p. (In Russ.).

Информация об авторах

А. И. Быстров — кандидат технических наук, доцент кафедры экономики и информационных технологий;

Р. З. Гильмутдинов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономики и информационных технологий.

Information about the authors

A. I. Bystrov — Candidate of Science (Technical), Associate Professor of the Department of Economics and Information Technology;

R. Z. Gilmutdinov — Candidate of Science (Physical and Mathematical), Associate Professor of the Department of Economics and Information Technology.

Статья поступила в редакцию 11.11.2024; одобрена после рецензирования 16.12.2024; принята к публикации 23.12.2024.

The article was submitted 11.11.2024; approved after reviewing 16.12.2024; accepted for publication 23.12.2024.